Exercice 19

1) $f: M(x,y) \longmapsto M'(X,Y)$

$$tq \begin{cases} X = \frac{1}{4}(x + \sqrt{3}y) \\ Y = \frac{1}{4}(-\sqrt{3}x + y) \end{cases}$$

$f: M(z) \longmapsto M'(Z)$; $z = x + iy$; $Z = X + iY$

tq: $Z = \frac{1}{4}(x + \sqrt{3}y) + \frac{1}{4}i(-\sqrt{3}x + y)$

$$Z = \frac{1}{4}\left[(x + iy) - i\sqrt{3}(x + iy)\right]$$

$$Z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{4}.z$$

D'où f est une similitude directe de centre O ; de rapport $\left|\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{2}$ d'angle $Arg\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right) \equiv \frac{-\pi}{3}$

2) a) $\begin{cases} X = \frac{1}{4}(x + \sqrt{3}y) \\ Y = \frac{1}{4}(-\sqrt{3}x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - \sqrt{3}.Y \\ y = \sqrt{3}X + Y \end{cases}$

D'où $(\mathcal{C}'): 15(X - \sqrt{3}Y)^2 + 13(\sqrt{3}X + Y)^2 - 2\sqrt{3}(X - \sqrt{3}Y).(\sqrt{3}X + Y) - 768 = 0$

$(\mathcal{C}'): 48\,X^2 + 64\,Y^2 - 768 = 0$

$(\mathcal{C}'): \frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{12} = 1$

b) $(\mathcal{C}')$ est une ellipse de centre O, de foyers $F(2,0)$ et $F'(-2,0)$

de sommets $A(4,0)$; $A'(-4,0)$; $B(0,2\sqrt{3})$; $B'(0,-2\sqrt{3})$

De directrices $D: X = 8$; $D': X = -8$ $\quad d'excentricité \quad e = \frac{1}{2}$

(*) $(\mathcal{C})$est une ellipse image de $(\mathcal{C}')$ par f^{-1}

$(\mathcal{C})$: ellipse de centre O, de foyers $K(2,2\sqrt{3})$; $K'(-2,-2\sqrt{3})$

De sommets $S(4,4\sqrt{3})$; $S'(-4,-4\sqrt{3})$

$L(-6,2\sqrt{3})$; $L'(6,-2\sqrt{3})$

$$e = \frac{1}{2}$$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn
Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn